

Ventunesima Gara di Informatica per studenti delle Scuole Superiori

Esercizi di gara

AVVISI:

- Se non specificato altrimenti negli esercizi, le sequenze iniziali su nastro si intendono *non vuote*, ovvero contenenti almeno un simbolo.
- Per numero decimale si intende un numero positivo o nullo rappresentato con le cifre 0, 1, 2, ..., 9, senza zeri iniziali non significativi; per esempio 0 e 19 sono numeri validi, mentre 0032 deve essere scritto come 32.
- Nel fornire le soluzioni, ricordarsi di pulire il nastro finale da ogni simbolo che non costituisca la risposta!
- Ogni volta che si salva la soluzione di un esercizio con il simulatore della macchina di Turing, il “timestamp” dell’esercizio viene aggiornato con il tempo trascorso fino a quel momento.

Esercizio 1: Produzione e trasformazione. [Punti 1] Un’economia funziona come una serie di passi di trasformazione, in cui un certo numero di unità di varie *materie prime* sono trasformate in un *prodotto* attraverso un *processo produttivo*. Nel caso più semplice, un’unità della materia prima A (per esempio: un’arancia) viene trasformata in un’unità del prodotto B (per esempio: mezzo bicchiere di aranciata) dal processo di spremitura. Si scriva un programma per macchina di Turing che, ricevuta sul nastro una sequenza rappresentante la quantità di arance disponibili (indicate da A), lasci sul nastro la corrispondente sequenza di prodotti (indicati da B).

<i>NASTRO INIZIALE</i>	<i>NASTRO FINALE</i>
AAA	BBB
AAAAAA	BBBBBB
A	B

Esercizio 2: A me un bicchiere! [Punti 2] Di solito, i consumatori preferiscono acquistare un bicchiere di aranciata (il prodotto C), piuttosto che due mezzi bicchieri di aranciata (prodotto B). Si modifichi il programma precedente in modo da lasciare sul nastro la quantità di bicchieri interi di aranciata prodotti – eventualmente, seguiti da un mezzo-bicchiere.

<i>NASTRO INIZIALE</i>	<i>NASTRO FINALE</i>
AA	C
AAAAAAAA	CCCCB
A	B
AAAAAAAAAAAA	CCCCCC

Esercizio 3: Senza conservanti aggiunti [Punti 3] La nostra spremuta d’arancia è un prodotto del tutto naturale. Sfortunatamente, senza conservanti, la bevanda va consumata rapidamente, perché la vitamina C contenuta nel succo d’arancia si ossida facilmente a contatto con l’aria, e la bevanda perde le sue qualità organolettiche e nutritive. Si scriva un programma per macchina di Turing che, ricevuto sul nastro di input una sequenza su {B, C} che rappresenta un certo numero di bicchieri e mezzi-bicchieri di spremuta d’arancia prodotti, seguita da un numero decimale n che rappresenta il tempo trascorso dalla produzione, cancelli dalla sequenza i primi n prodotti, da sinistra a destra, che saranno quelli andati a male nelle n unità di tempo trascorse. Il nastro di output deve contenere l’elenco dei prodotti ancora adatti al consumo, nello stesso ordine in cui erano presenti nell’input.

<i>NASTRO INIZIALE</i>	<i>NASTRO FINALE</i>
CCCCCBCC4	CBCC
BBBBBCBCBCCBCCBCCB12	BBCBCCCB
CBBC0	CBBC
BBB3	

Esercizio 4: Ecco il conto. [Punti 4] Il nostro venditore di aranciate vende ogni bicchiere di aranciata a 1.00 €, e il mezzo bicchiere a 0.50 €. Si scriva un programma per macchina di Turing che, ricevuto sul nastro in ingresso una rappresentazione del numero di arance disponibili, lasci sul nastro il guadagno totale ottenuto vendendo tutta l'aranciata prodotta, espresso come ammontare monetario (includendo sempre il separatore decimale “.” e due cifre per i centesimi).

<i>NASTRO INIZIALE</i>	<i>NASTRO FINALE</i>
AAA	1.50
A	0.50
AAAAAA	3.00

Esercizio 5: Espandiamo il business! [Punti 7] Espandiamo il nostro business: con 3 arance (A) e 1 unità di zucchero (Z) è possibile produrre un'unità di canditi di arancia (D), del valore di 5.00€. Con solo 2 arance si produce un bicchiere di aranciata (C) del valore di 1.00€. E con una sola arancia, si può produrre un mezzo bicchiere di aranciata (B) del valore di 0.50€. Si scriva un programma per macchina di Turing che, ricevuta sul nastro iniziale una sequenza di A e Z (ordinata alfabeticamente) che rappresenta la situazione iniziale del magazzino, lasci sul nastro la sequenza ordinata alfabeticamente che rappresenta i prodotti corrispondenti al massimo valore possibile, che è possibile realizzare con le materie prime in magazzino; in caso di parità di valore, si prediliga la sequenza più corta.

<i>NASTRO INIZIALE</i>	<i>NASTRO FINALE</i>
AAAAAAZZ	DD
AAAAAZ	CD
AAAAAZZ	CDZ
AAAAZ	BD
AAAAAAAAAAZZ	CCDD
AAAAA	BCC

Esercizio 6: Rifornire il magazzino [Punti 5] La nostra impresa cresce, e comincia a prendere ordini dai clienti. Un ordine ha la forma di una sequenza di coppie <quantità, prodotto>, in cui la quantità è rappresentata da un intero decimale, e il prodotto¹ è codificato da una lettera sull'alfabeto {A, B, C, D, Z} come sopra. Assumiamo che un cliente possa ordinare al massimo 9 unità di un prodotto, e che gli ordini nella sequenza seguano l'ordine alfabetico. Si scriva un programma per macchina di Turing che, ricevuto sul nastro di ingresso un ordine come descritto sopra, lasci sul nastro la sequenza di materie prime da ordinare (arance e zucchero) per soddisfare l'ordine, anch'essa in ordine alfabetico.

<i>NASTRO INIZIALE</i>	<i>NASTRO FINALE</i>
2C4D	AAAAAAAAAAAAAAAAAAZZZZ
1B2C	AAAAA
3A3B	AAAAAA
3A5D2Z	AAAAAAAAAAAAAAAAAAZZZZZZ

¹ Consentiamo al cliente di ordinare anche materie prime, in maniera simile agli altri prodotti.

Esercizio 7: Ore lavorate. [Punti 12] Oltre alle materie prime, un processo produttivo richiede anche del *lavoro*, che è tipicamente misurato sotto forma di tempo di lavoro di un lavoratore medio. Indichiamo con il simbolo H un'unità di lavoro di un lavoratore medio, e assumiamo che la produzione di canditi (D) richieda 5H, quella di un bicchiere di aranciata (C) 2H, e quella di mezzo bicchiere (B) 1H. Rivendere materie prime (A, Z) non costa lavoro (quindi, 0H). Inoltre, assumiamo che n lavoratori possano eseguire in tempo t gli stessi processi produttivi che 1 lavoratore impiega $n \times t$ a eseguire. Si tratta ovviamente di una pesante approssimazione, perché nella realtà un processo produttivo può essere limitato da altri fattori temporali (per esempio: la disponibilità di macchinari, o il tempo necessario a processi naturali come la fermentazione, ecc.). Sotto le ipotesi precedenti, si scriva un programma per macchina di Turing che, ricevuta sul nastro una sequenza di ordini come nell'esercizio precedente, seguita dal carattere ":" e dal numero di lavoratori disponibili (compreso fra 1 e 9), lasci sul nastro il tempo di lavoro necessario a completare l'ordine, espresso come un numero decimale seguito dall'unità H (approssimato verso l'alto).

<i>NASTRO INIZIALE</i>	<i>NASTRO FINALE</i>
2C4D:2	12H
3A5D2Z:3	9H
9A:1	0H
3A8B5D:1	33H
3A8B5D:5	7H
9B:9	1H
9B9C9D:7	11H

Esercizio 8: Assegnare lo staff. [Punti 18] I lavoratori vanno adeguatamente retribuiti! Assumiamo che una unità di lavoro H costi 2 €. Lo stipendio di un lavoratore è dato da una quota base di 5 € per ogni ordine, indipendente dalle ore lavorate, e da una quota variabile di 2 € per ogni unità di lavoro H o frazione. Si scriva un programma per macchina di Turing che, ricevuto sul nastro di ingresso un ordine, nello stesso formato degli esercizi precedenti, seguito dal simbolo "#" e da un numero minimo di lavoratori da impiegare, compreso fra 1 e 8, restituisca il numero ottimale (ovvero: di costo totale minimo) di lavoratori da impiegare per servire completamente l'ordine, sotto le ipotesi che tutti i lavoratori impiegati ricevano esattamente la stessa paga (in altri termini: si dividano il lavoro in parti uguali fra di loro). Si assuma che l'azienda abbia in totale 9 dipendenti, e quindi non si possono assegnare più di 9 dipendenti allo stesso ordine, e che nel conteggio del costo totale non vadano considerati i lavoratori non impiegati nel servire l'ordine.

<i>NASTRO INIZIALE</i>	<i>NASTRO FINALE</i>
1D#1	1
1D#4	5
2B3D#4	4
2B3D#8	9
2A3C#5	6
2A3C#1	1
8C9D3Z#6	7



Esercizio 9: Decidere il prezzo [Punti 22] Il lettore attento avrà notato, negli esercizi precedenti, che produrre un bicchiere di aranciata (che si vende a 1 €) richiede 1 unità di lavoro H. Tuttavia, pagare lo stipendio al lavoratore che fornisce l'unità di lavoro, costa 2 € (più la parte fissa), e quindi sicuramente produrre bicchieri di aranciata non è un impiego redditizio — anzi, si va in perdita, perdendo tanto più denaro quanta più aranciata si produce (che, paradossalmente, vuol dire che il prodotto ha successo presso il pubblico!). La stessa cosa accade per i canditi. Questo è un problema comune a molte imprese: non basta produrre un prodotto di successo, occorre anche fare utili su ogni prodotto venduto.

Una *formula di produzione* indica quante unità di ogni materia prima (incluso il lavoro: insieme si chiamano i *fattori della produzione*) occorrono per produrre un certo numero di unità di un prodotto. Per esempio, la formula per un bicchiere di aranciata è $2A+2H \rightarrow 1C$, mentre quella per i canditi è $3A+1Z+5H \rightarrow 1D$. Potrei esprimere la formula per l'aranciata zuccherata in bottiglia come $8C+1Z+1H \rightarrow 2E$ (in cui E indica una singola bottiglia, e con le dosi indicate si produce una quantità di aranciata zuccherata corrispondente a 2 bottiglie, che poi posso vendere singolarmente²).

Si scriva un programma per macchina di Turing che, ricevuto sul nastro di ingresso una sequenza di *prezzi* di materie prime, nel formato $AnZmHp$ (in cui n è il costo unitario di un'arancia, m è il costo dello zucchero, e p il costo dell'unità di lavoro), lasci sul nastro il prezzo minimo a cui vendere una bottiglia di aranciata zuccherata per non andare in perdita. Tutte le quantità monetarie sono espresse nel formato con centesimi (es: 0.70), e i prezzi dei fattori di produzione sono compresi fra 0.00 e 9.99 €.

NASTRO INIZIALE	NASTRO FINALE
A0.20Z1.10H2.00	19.15
A0.10Z1.50H1.50	14.30
A0.00Z0.00H0.00	0.00
A0.00Z1.00H2.50	21.75
A0.20Z2.00H0.33	5.41

Esercizio 10: Formule alternative [Punti 30] A volte esistono più formule di produzione alternative per realizzare lo stesso prodotto. Per esempio, un produttore potrebbe usare $8C+1Z+1H \rightarrow 2E$ per produrre l'aranciata zuccherata in bottiglia, mentre un altro potrebbe ottenere lo stesso prodotto con la formula $3S+1Z+3W+3H \rightarrow 3E$ (in cui S è il succo concentrato, e W l'acqua aggiunta al concentrato). Codifichiamo una formula di produzione come una sequenza di coppie $\langle \text{quantità}, \text{fattore} \rangle$ separate dal simbolo +, seguita dal simbolo = (al posto della \rightarrow) e infine dalla coppia $\langle \text{quantità}, \text{prodotto} \rangle$ del risultato. Ogni *quantità* è un numero intero fra 1 e 9, mentre *fattore* e *prodotto* sono denotati da una singola lettera sull'alfabeto A-Z. Assumiamo inoltre che i fattori siano sempre elencati in ordine alfabetico. Per esempio, la seconda formula per l'aranciata in bottiglia sarà codificata come: $3H+3S+3W+1Z=3E$. Infine, codifichiamo una *tabella dei prezzi* come una sequenza di coppie $\langle \text{prodotto}, \text{prezzo} \rangle$, in cui il prodotto (o fattore) è denotato come sempre da una singola lettera, e il prezzo è espresso come un numero decimale con i centesimi, compreso fra 0.00 e 9.99. Anche la tabella dei prezzi sarà ordinata secondo l'ordine alfabetico. Per esempio, una tabella dei prezzi potrebbe essere codificata come C0.10H1.50S0.55W0.02Z1.10. Si scriva un programma per macchina di Turing che, ricevuto sul nastro di input una tabella dei prezzi, seguita dal simbolo “:”, e da una sequenza di formule di produzione per lo stesso prodotto, separate fra di loro dal simbolo “/”, lasci sul nastro la più conveniente, in termini di prezzo unitario del prodotto finale (eventualmente approssimato in alto al centesimo), fra le formule di produzione presentate. In caso di parità, si restituisca la prima formula nell'ordine di elencazione nell'input.

NASTRO INIZIALE ³	NASTRO FINALE
C0.10 H1.50 S0.55 W0.02 Z1.10: 8C+1H+1Z=2E/ 3H+3S+3W+1Z=3E	8C+1H+1Z=2E (la prima formula costa 1.70 per ogni E, la seconda 2.43 per ogni E)
A0.10 C0.40 H1.50 S0.50 W0.08 Z1.00: 8C+1H+1Z=2E/ 1H+3S+3W+1Z=3E/ 6A+2H+1W+1Z=1E	1H+3S+3W+1Z=3E
A0.10B0.50H0.50S0.50W0.12:2A+1H=1C/2B=1C/1 S+1H+1W=2C	1S+1H+1W=2C

² Si noti tuttavia che, per semplicità, non abbiamo aggiunto fra i fattori della produzione la bottiglia vuota, da riempire con l'aranciata prodotta!

³ Gli spazi e gli a-capo sono inseriti nei primi esempi per facilitare la lettura; sul nastro la sequenza di input effettiva sarà continua.